

# МЕТОД МАТРИЧНОГО ПРОПАГАТОРА ДЛЯ РАССЕЙНИЯ ЗВУКА НА СТАТИСТИЧЕСКИХ НЕРОВНОСТЯХ ДНА

Д.В. Макаров, П.С. Петров, М.Ю. Улейский

Рассматривается задача о распространении звука мелком море в присутствии случайных неровностей дна. В модовом представлении эволюция акустического поля может быть описана с помощью матричного пропагатора. В работе предложен метод расчета случайных матриц пропагатора, основанный на теории возмущений для матричных операторов и адаптированный для мелкого моря. За основу взята модель двумерного распространения звука, описываемого широкоугольным параболическим уравнением. В рамках предлагаемого метода влияние мод, распространяющихся внутри осадочного слоя, учитывается с помощью добавок к модовым коэффициентам затухания. Рассмотрена модель неоднородности, описываемая случайным процессом Орнштейна–Уленбека, и получены аналитические оценки для матричных элементов пропагатора. В качестве примера для численного моделирования рассмотрена модель мелководного акустического волновода с придонным звуковым каналом. Проведен статистический анализ распространения тональных звуковых сигналов с частотами 100, 200 и 400 Гц. Получены статистические оценки горизонтальных вариаций модового спектра и индекса мерцания отдельных мод акустического поля. Исследована зависимость рассеяния звука от радиуса корреляций неровности. Показано, что обусловленное рассеянием межмодовое взаимодействие на сравнительно малых расстояниях увеличивает затухание мод, а на больших – способствует замедлению затухания и отклонению от экспоненциального закона спада интенсивности. Индекс мерцания демонстрирует быстрый нелинейный рост на малых расстояниях, который в дальнейшем сопровождается достижением насыщения.

**Ключевые слова:** теория случайных матриц, акустика мелкого моря, рассеяние звука.

## Введение

Распространение звука в подводном акустическом волноводе со случайной неровностью дна относится к широкому классу задач статистической радиофизики, касающихся рассеяния волн случайными поверхностями. При этом постановка задачи в подводной акустике имеет определенные специфические особенности по сравнению с традиционными задачами статистической радиофизики. В частности, в подводной акустике существенное значение имеет проницаемость дна для акустических волн, что заставляет учитывать распространяющиеся в дне звуковые волны как дополнительную подсистему задачи. Кроме того, сама по себе постановка задачи о рассеянии звука неровностями дна в большей степени актуальна для мелкого моря и маломодового режима распространения, когда лучевое описание, как

правило, оказывается неприменимым. Последнее обстоятельство указывает на предпочтительность модового подхода при описании данного вида рассеяния. Здесь мы особо подчеркнем, что речь идет именно о рассеянии в режиме волноводного распространения, когда угол скольжения звуковой волны относительно рассеивающей поверхности является сравнительно малым. Режим акустической засветки неоднородности дна под большими углами скольжения в данной работе рассматриваться не будет.

Одной из основополагающих работ, посвященных модовому описанию рассеяния на случайных неоднородностях в мелком море, является статья [1], в которой впервые был проведен анализ кинетических уравнений для модовых интенсивностей в условиях мелкого моря. В качестве фактора рассеяния в этой работе рассматривалось турбулентное поле внутренних волн. В работах [2, 3] аналогичный подход был

использован для исследования рассеяния на неровностях дна. В качестве недостатка кинетического подхода можно указать потерю информации об интерференционной структуре поля. Этому недостатка лишен, например, анализ рассеяния на шероховатостях с применением метода поперечных сечений [4]. Другой альтернативой является построение матрицы межмодового взаимодействия – так называемого матричного модового пропагатора. По нашим сведениям, первым применением данного подхода к задачам распространения звука в волноводе с неоднородной батиметрией является работа [5]. В настоящей работе мы представим несколько иную версию этого подхода, основанную на моделировании пропагатора акустического поля как случайной матрицы. Предлагаемый нами метод является обобщением теоретического аппарата, предложенного в работах [6–14], на случай мелководных акустических волноводов. В работе [15] была предложена схема экспериментального определения пропагатора. Кроме того, отметим работу [16], в которой было показано, что прямое измерение пропагатора может быть использовано для идентификации зон интенсивного выхода метана из морского дна.

**■ Пропагатор акустического поля в мелком море**

Рассмотрим двумерный акустический волновод в мелком море с водным слоем сверху и осадочным снизу. В общем случае звуковое поле в волноводе описывается уравнением Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right] + k_0^2 n^2 P = 0, \quad (1)$$

где  $z$  – глубина,  $r$  – горизонтальная координата,  $P(r, z)$  – акустическое давление,  $k_0$  – опорное волновое число, связанное с частотой звука  $f$  с помощью формулы  $k_0 = 2\pi f / c_0$ ,  $n(r, z)$  – показатель преломления звуковых волн. Пренебрегая обратным рассеянием звука, мы можем свести уравнение Гельмгольца (1) к широкоугольному параболическому уравнению для огибающей акустического поля

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = ik_0 (\hat{Q} - 1) \Psi. \quad (2)$$

Огибающая акустического поля связана с акустическим давлением с помощью формулы

$$\Psi = \sqrt{\frac{\pi k_0 r}{2}} e^{-i(k_0 r - \frac{\pi}{4})} P.$$

Здесь использован оператор  $\hat{Q}$ :

$$\hat{Q} = \sqrt{n^2 + \frac{1}{k_0^2} \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right]},$$

$\rho$  – плотность среды. На поверхности воды акустическое поле удовлетворяет граничному условию Дирихле:

$$\Psi|_{z=0} = 0.$$

Снизу осадочный слой граничит со слоем твердых пород, поэтому на нижней границе  $z = L$  выполняется граничное условие Неймана:

$$\left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=L} = 0.$$

Условие на границе раздела между водным и осадочным слоями,  $z = h$ , выглядит следующим образом:

$$\Psi|_{z=h-0} = \Psi|_{z=h+0},$$

$$\left. \frac{1}{\rho_{\text{wat}}} \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=h-0} = \left. \frac{1}{\rho_{\text{sed}}} \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=h+0}.$$

где  $\rho_w$  и  $\rho_{\text{sed}}$  – значения плотности в воде и осадочном слое соответственно.

Решение параболического уравнения может быть формально записано с помощью пропагатора  $\hat{G}(r_1, r_0)$  как

$$\Psi(r_1, z) = \hat{G}(r_1, r_0) \Psi(r_0, z).$$

Цель данной работы – найти явный вид пропагатора, описывающего распространение звука в мелком море с неровным дном. Мы будем рассматривать случай, когда неровность является малой. Тогда уравнение (2) может быть переписано как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = ik_0 (\hat{Q}_0 + \hat{V}(r) - 1) \Psi,$$

где оператор  $\hat{Q}_0$  описывает горизонтально-однородную составляющую оператора  $\hat{Q}$ , а  $\hat{V}(r)$  представляет собой оператор возмущения, соответствующий влиянию неоднородности. Акустическое поле может быть представлено как суперпозиция нормальных мод невозмущенного волновода:

$$\Psi(r, z) = \sum_m a_m(r) \Psi_m(z), \quad (3)$$

где модовые амплитуды определяются формулой

$$a_m(r) = \int \frac{\Psi_m^*(z) \Psi(r, z)}{\rho(z)} dz.$$

Нормальные моды являются решениями задачи Штурма—Лиувилля:

$$k_0^2 \hat{Q}_0^2 \Psi_m = k_{rm}^2 \Psi_m.$$

В полной ортонормированной системе нормальных мод мы можем представить пропагатор в виде конечной матрицы с элементами:

$$G_{mn}(r_1, r_0) = \int_{z=0}^L \Psi_m(z) \hat{G}(r_1, r_0) \Psi_n(z) dz,$$

где  $\hat{G}(r_1, r_0) \Psi_n(z)$  – профиль акустического поля при  $r = r_1$ , если при  $r = r_0 < r_1$  оно описывалось  $n$ -й модой  $\Psi_n(z)$ . Получающаяся матрица определяет горизонтальные вариации вектора, составленного из модовых амплитуд:

$$\mathbf{a}(r_1) = \mathbf{G}(r_1, r_0) \mathbf{a}(r_0), \quad (4)$$

При использовании базиса нормальных мод пропагатор горизонтально-однородного волновода выражается в виде диагональной матрицы  $\mathbf{A}$  с элементами

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}, \quad A_{mn}(r_1, r_0) = \delta_{mn} e^{i(k_{rm} - \alpha_m)(r_1 - r_0)}, \quad (5)$$

где  $\delta_{mn}$  – символ Кронекера. В неоднородном волноводе модовые амплитуды удовлетворяют системе связанных уравнений:

$$\frac{da_m}{dr} = i(k_{rm} - k_0)a_m + ik_0 \sum_n V_{mn}(r) a_n, \quad (6)$$

где  $V_{mn}(r)$  – матричный элемент возмущения,

$$V_{mn}(r) = \int \frac{\Psi_m^*(z) \hat{V}(r) \Psi_n(z)}{\rho(z)} dz.$$

Используя подстановку

$$b_m(r) = a_m(r) e^{-i(k_{rm} - k_0)r},$$

мы можем привести уравнения (6) к виду:

$$\frac{db_m}{dr} = ik_0 \sum_n V_{mn}(r) e^{i(k_{rn} - k_{rm})r} b_n. \quad (7)$$

Распространяющиеся моды в мелководном волноводе можно разделить на две группы: водные моды со слабым поглощением и моды осадочного слоя с достаточно сильным поглощением. На практике мы практически всегда лишены подробной информации об акустических свойствах дна, поэтому осадочные моды, как правило, неизвестны нам достоверно. В связи с этим целесообразно попытаться исключить их из рассмотрения, описав их эффект в рамках того или иного приближения. В качестве такого приближения может быть использовано приближение

Вайскопфа—Вигнера [17], известное из квантовой механики. Чтобы воспользоваться приближением Вайскопфа—Вигнера, мы явно выделим в сумме (3) вклады водных и донных мод:

$$\Psi(r, z) = \sum_{m=1}^M a_m(r) \Psi_m(z) + \sum_{m=M+1}^{M_d} a_m(r) \Psi_m(z),$$

где  $M$  – число водных мод, а  $M_d$  – общее число мод дискретного спектра. Тогда уравнения (7) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{db_m}{dr} &= ik_0 \sum_{n=1}^M V_{mn}(r) e^{i(k_{rn} - k_{rm})r} b_n + \\ &+ ik_0 \sum_{n=M+1}^{M_{\max}} V_{mn}(r) e^{i(k_{rn} - k_{rm})r} b_n. \end{aligned}$$

Донные моды характеризуются достаточно высоким затуханием, поэтому мы можем пренебречь перетоком акустической энергии из донных мод в водные. Кроме того, можно пренебречь вкладом донных мод в спектр начального состояния акустического поля. Отсюда получаем интегральное представление для амплитуд донных мод следующего вида:

$$b_n(r_1) = ik_0 \sum_{n'=1}^{M_{\max}} \int_{r_0}^{r_1} V_{nn'}(r') e^{i(k_{rn} - k_{rn'})r'} b_{n'}(r') dr'.$$

Исключая донные моды с помощью приближения Вайскопфа—Вигнера, получаем систему уравнений для амплитуд водных мод:

$$\frac{db_m}{dr} = ik_0 \sum_{n'=1}^M V_{mn'}(r') e^{i(k_{rn} - k_{rn'})r'} b_{n'}(r') - \Gamma_m b_m,$$

где введены дополнительные коэффициенты затухания, обусловленные взаимодействием с донными модами:

$$\Gamma_m = k_0^2 \sum_{n=M+1}^{M_{\max}} \tilde{C}_{mn}(k_m - k_n).$$

Входящая в это выражение функция  $\tilde{C}_{mn}(k)$  является Фурье-образом функции

$$C_{mn}(r, r') = \langle V_{mn}(r) V_{nm}(r') \rangle e^{i(\alpha_m - \alpha_n)(r - r')}, \quad n > M.$$

Переходя обратно от амплитуд  $b_m$  к амплитудам  $a_m$  и проводя интегрирование с применением теории возмущений, мы получаем матричное представление уравнений (6) в виде (4), где матричный пропагатор определяется выражением:

$$\mathbf{G}(r_1, r_0) = \mathbf{A}(\mathbf{I} + i\mathbf{A}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{A}$  определяется выражением (5), а матрица  $\mathbf{A}$  описывает вклад взаимодействия между модами. Элементы матрицы  $\mathbf{A}$  определяются по формуле:

$$A_{mn} = k_0 \int_{r'=r_0}^{r_1} V_{mn}(r') e^{-i(k_m - k_{r_m})r'} dr'.$$

Выражение (8) соответствует первому порядку теории возмущения и является применимым в том случае, если шаг пропагатора  $\Delta r = r_1 - r_0$  является достаточно малым. Чтобы обеспечить применимость теории возмущений, мы можем разделить волновод на короткие сегменты и представить результирующий пропагатор в виде произведения:

$$G(r_F, r_0) = \prod_j G((j-1)r_F, r_F - j\Delta r).$$

**■ Пропагатор в волноводе со случайной неровностью дна**

Перейдем к выводу выражения пропагатора для волновода, в котором роль неоднородности играют горизонтальные изменения глубины дна:

$$h(r) = h_0 + \delta h(r).$$

Мы будем предполагать, что  $\delta h(r)$  является некоторой случайной функцией. Чтобы получить явный вид возмущения, обусловленного неоднородностью, введем новую переменную глубины:

$$Z = \frac{h_0}{h(r)} z = \frac{z}{1 + \eta(r)},$$

где

$$\eta = \frac{\delta h}{h_0}.$$

При замене переменной  $z$  на  $Z$  в параболическом уравнении происходит преобразование производных:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} + Z \frac{dh/dr}{h} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{(1 + \eta)} \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Теперь широкоугольное параболическое уравнение (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{Z}{h} \frac{dh}{dr} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + ik_0 (\hat{Q} - 1) \Psi, \quad (9)$$

где операторный квадратный корень  $\hat{Q}$  задается как

$$\hat{Q} = \sqrt{n^2(Z) + \frac{\rho}{k_0^2 (1 + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} \right]}.$$

Чтобы получить выражение для пропагатора с помощью теории возмущений, необходимо найти явный вид оператора  $\hat{V}(r)$ . Учитывая, что  $\eta \ll 1$ , мы можем записать:

$$n^2(r, Z) = n_0^2(Z) + 2n_0(Z) Z \frac{\partial n_0}{\partial Z} \eta(r),$$

$$\rho(r, Z) = \rho_0(Z) + Z \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \eta(r),$$

где

$$n_0(Z) = n(Z) \Big|_{\eta=0}, \quad \rho_0(Z) = \rho(Z) \Big|_{\eta=0}.$$

Условие  $\eta \ll 1$  также позволяет нам воспользоваться приближениями:

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \approx \frac{d\eta}{dr}, \quad \frac{1}{(1 + \eta)^2} \approx 1 - 2\eta.$$

Тогда широкоугольное параболическое уравнение (9) может быть переписано как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = i \frac{d\eta}{dr} \hat{D}_a \Psi + ik_0 (\hat{Q} - 1) \Psi, \quad (10)$$

где операторный квадратный корень теперь выглядит как

$$\hat{Q} = \sqrt{n_0^2 + \frac{\rho_0}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial Z} \right] + 2\eta(r) \hat{D}_b},$$

а  $\hat{D}_a$  и  $\hat{D}_b$  – дифференциальные операторы, задаваемые выражениями:

$$\hat{D}_a = iZ \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\hat{D}_b = n_0 \frac{\partial n_0}{\partial Z} Z - \frac{\rho_0}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial Z} \right].$$

Выделим возмущение, содержащее  $\eta(r)$ , из подоператорного корня в уравнении (10):

$$\hat{Q} \approx \hat{Q}_0 + \eta(r) \hat{D}_b.$$

Матричные элементы получающегося оператора возмущения задаются формулой

$$V_{mn} = \frac{1}{k_0} \frac{d\eta}{dr} D_{a,mn} + \eta D_{b,mn},$$

где

$$D_{a,mn} = \int \frac{\Psi_m^*(Z) \hat{D}_a \Psi_n(z)}{\rho_0(z)} dz,$$

$$D_{b,mn} = \int \frac{\Psi_m^*(Z) \hat{D}_b \Psi_n(z)}{\rho_0(z)} dz.$$

Элементы матрицы **A** описываются выражением

$$A_{mn} = k_0 (v_{a,mn} D_{a,mn} + v_{b,mn} D_{b,mn}),$$

где

$$v_{a,mn} = \frac{1}{k_0} \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} \frac{d\eta}{dr} e^{i(k_m - k_{r_m})r'} dr',$$

$$v_{b,mn} = \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} \eta e^{i(k_m - k_{r_m})r'} dr'.$$

Полагая, что в отсутствие неоднородности волновода затухание водных мод является достаточно слабым,  $\text{Im} k_{rm} \ll \Delta r^{-1}$ , мы можем пренебречь мнимыми частями модовых волновых чисел, что дает:

$$\begin{aligned} v_{a,mn} &= \frac{1}{k_0} \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \frac{d\eta}{dr} e^{i(k_n-k_m)r'} dr', \\ v_{b,mn} &= \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \eta e^{i(k_n-k_m)r'} dr', \end{aligned} \quad (11)$$

где  $k_m = \text{Re} k_{rm}$ .

### ■ Неровность дна, описываемая стохастическим процессом Орнштейна—Уленбека

Рассмотрим частный случай, когда функция  $\eta(r)$ , характеризующая неровность дна, описывается формулой

$$\eta(r) = \sigma_\eta \bar{\eta}(r),$$

где  $\bar{\eta}(r)$  – стохастический процесс Орнштейна—Уленбека, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения в форме уравнения Ланжевена:

$$\frac{d\bar{\eta}}{dr} = -\frac{\bar{\eta}}{r_c} + \sqrt{\frac{2}{r_c}} \xi.$$

Здесь  $r_c$  – радиус корреляций неровности,  $\xi$  – дельта-коррелированный гауссов белый шум с единичной дисперсией. Стохастический процесс Орнштейна—Уленбека характеризуется экспоненциально спадающей автокорреляционной функцией.

Интегралы (11), в рассматриваемом случае, допускают аналитическую оценку:

$$\begin{aligned} v_{a,mn} &= -\frac{v_{b,mn}}{k_0 r_c} + \frac{\sigma_\eta}{k_0} \sqrt{\frac{2\Delta r}{r_c}} \xi_{a,mn}, \\ v_{b,mn} &= \sqrt{K_{mn}} \sigma_\eta \Delta r \xi_{b,mn}, \end{aligned}$$

где  $\xi_{a,mn}$  и  $\xi_{b,mn}$  – гауссовы случайные переменные с единичной дисперсией,

$$K_{mn} = \int S(k) \text{sinc}^2 \left[ \frac{(k+k_n-k_m)\Delta r}{2} \right] dk.$$

Функция  $S(k)$  представляет собой спектр мощности процесса Орнштейна—Уленбека,

$$S(k) = \frac{\sigma_\eta^2 r_c}{\pi(1+k^2 r_c^2)}.$$

Таким образом, получаем выражение для элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , описывающей вклад межмодового взаимодействия:

$$A_{mn} = k_0 \left[ D_{a,mn} \sqrt{\frac{2\Delta r}{r_c}} \xi_{a,mn} + \left( D_{b,mn} - \frac{D_{a,mn}}{k_0 r_c} \right) \xi_{b,mn} \right]. \quad (12)$$

### ■ Численное моделирование

Для численной иллюстрации рассмотрим мелководный акустический волновод, у которого профиль скорости звука в водном слое задается выражением:

$$c(z) = \begin{cases} c_0 - \frac{\Delta_c}{2} \left( 1 + \tanh \frac{z-z_c}{\Delta_z} \right), & 0 \leq z < h, \\ c_b, & h \leq z \leq L, \end{cases} \quad (13)$$

где  $c_0 = 1500$  м/с,  $\Delta_c = 25$  м/с,  $z_c = 50$  м,  $\Delta_z = 10$  м,  $h_0 = 100$  м,  $c_b = 1600$  м/с. Водная часть профиля скорости звука представлена на рис. 1. Плотность воды в расчетах равна 1 г/см<sup>2</sup>, плотность в осадочном слое равна 1,7 г/см<sup>3</sup>. Среднеквадратическое отклонение дна  $\sigma_\eta$  взято равным 1 м. Значение радиуса корреляций неровности  $r_c$  варьировались от 100 до 1000 м.

Нами было проведено статистическое моделирование матриц пропагатора для двух значений частоты сигнала: 100 и 400 Гц. Число водных мод  $M$  зависит от частоты: оно равно 5 для частоты 100 Гц и 20 для частоты 400 Гц. Шаг пропагатора  $\Delta r$  при численном моделировании взят равным  $r_c$ , что, с одной стороны, обеспечивает применимость теории возмущений для оценки матричных элементов пропагатора, а с другой стороны, отвечает условию статистической независимости пропагаторов для соседних сегментов вол-

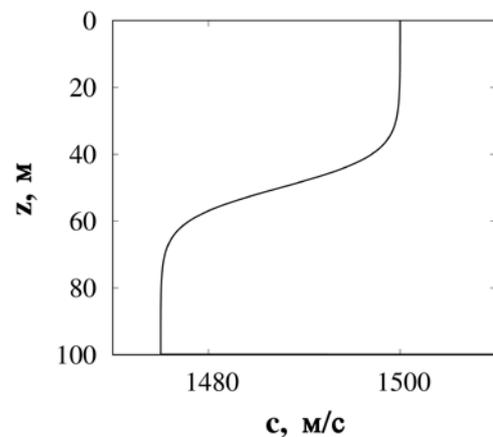


Рис. 1. Профиль скорости звука, описываемый формулой (13)

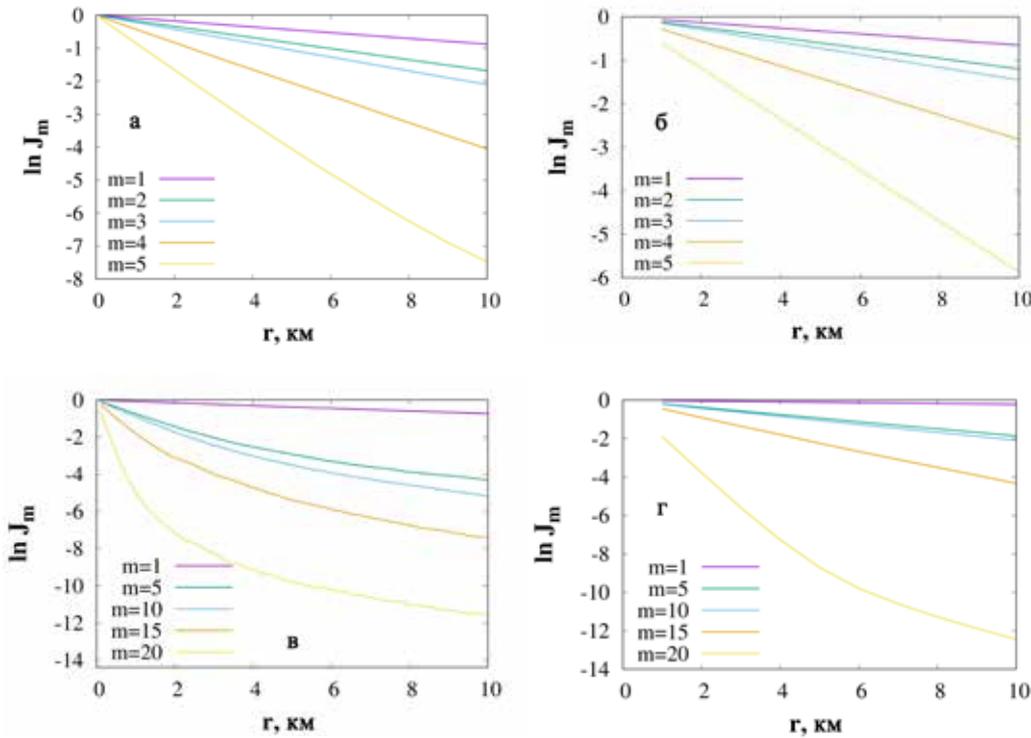


Рис. 2. Зависимость населенностей различных мод (14) от расстояния. Значения частоты сигнала: 100 Гц (панели а и б) и 400 Гц (панели в и г). Значения радиуса корреляций неровности  $r_c$ : 100 м (панели а и в) и 1000 м (панели б и г)

новода. Для каждого набора параметров проводился статистический анализ на основе 1000 реализаций матриц пропагатора.

На рис. 2 показано спадание с расстоянием средних модовых интенсивностей, определяемых по формуле

$$J_m(r) = \frac{\langle |a_m(r)|^2 \rangle}{|a_m(r=0)|^2} = \langle |G_{mm}(r,0)|^2 \rangle. \quad (14)$$

Здесь угловые скобки соответствуют усреднению по ансамблю реализаций неровности. Мы видим несколько тенденций. Во-первых, при частоте 100 Гц это спадание является экспоненциальным для всех водных мод волновода вне зависимости от радиуса корреляций неровности. На рисунке мы это видим

как линейное спадание логарифма интенсивности. Во-вторых, уменьшение радиуса корреляций приводит к достаточно существенному усилению затухания, обусловленному, по всей видимости, усилением межмодового взаимодействия. Это особенно ярко показано на рис. 3 и вполне согласуется с полученной нами формулой (50). Третья тенденция – это значительное усиление затухания с ростом частоты, что связано как с ростом невозмущенных модовых коэффициентов затухания, так и с усилением межмодового взаимодействия. При этом важно отметить двоякую роль межмодового взаимодействия: при превышении некоторого расстояния от источника оно замедляет спадание интенсивности, что может быть связано с приближением к квазиравновесному распределению модовых интенсивностей.

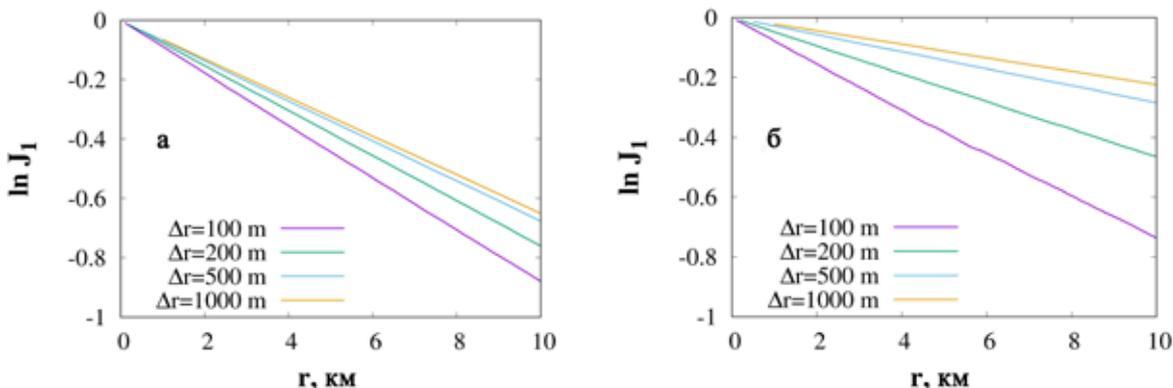
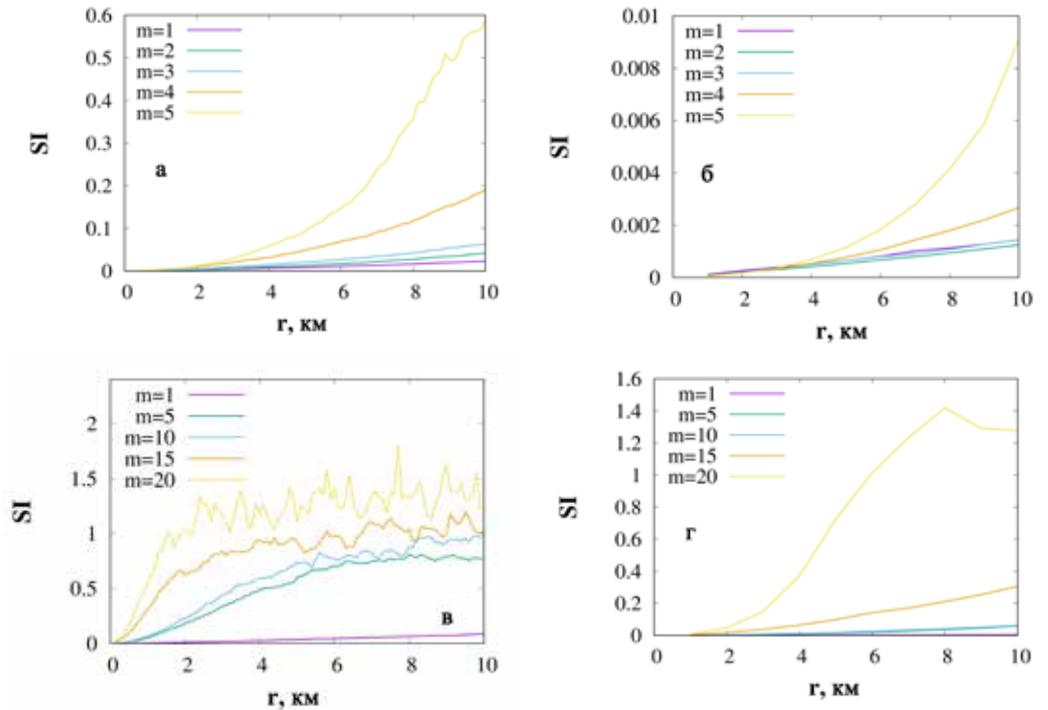


Рис. 3. Зависимость населенности первой моды от расстояния для тональных сигналов с частотой 100 Гц (а) и 400 Гц (б)

Рис. 4. Зависимость индекса мерцания от расстояния. Значения частоты сигнала: 100 Гц (панели а и б) и 400 Гц (панели в и г). Значения радиуса корреляций неровности  $r_c$ : 100 м (панели а и в) и 1000 м (панели б и г)



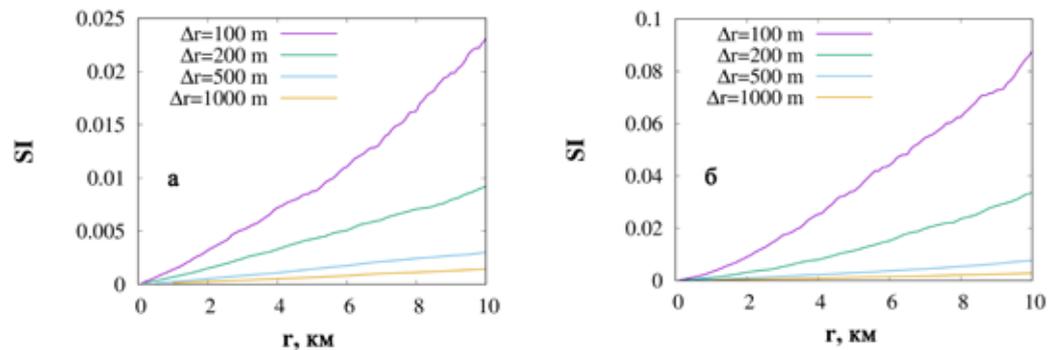
Флуктуации модовых интенсивностей можно охарактеризовать с помощью модового индекса мерцания:

$$SI(r, m) = \frac{\langle |G_{mm}(r, 0)|^2 \rangle}{\langle |G_{mm}(r, 0)| \rangle^2} - 1. \quad (15)$$

Данные, представленные на рис. 4, указывают на усиление флуктуаций с ростом номера моды. На малых расстояниях флуктуации нарастают нелинейно. После достижения насыщения, соответствующего

$SI \approx 1$ , рост индекса мерцания, как это наглядно продемонстрировано на рис. 5, в, позволяют сделать вывод, что расстояние, на котором достигается насыщение, пропорционально радиусу корреляций неровности  $r_c$ . Аналогичный результат ранее был получен в работе [4]. Вполне ожидаемо рост частоты приводит к резкому нарастанию индекса мерцания. Сопоставление данных, представленных на рис. 5, а, б, указывает, что четырехкратное увеличение частоты сопровождается четырехкратным увеличением SI.

Рис. 5. Зависимость индекса мерцания первой моды от расстояния для тональных сигналов с частотой 100 Гц (а) и 400 Гц (б)



### Заключение

В данной работе рассматривается метод моделирования акустических полей в случайно-неоднородном океане, основанный на применении теории случайных матриц. Основной результат работы за-

ключается в обобщении этого метода на мелководные волноводы со случайной неровностью дна. Получены аналитические оценки элементов матрицы возмущения для неровности, описываемой случайным процессом Орнштейна—Уленбека. Численное моделирование свидетельствует о двояком влиянии

рассеяния на спадание модовых интенсивностей: сначала оно ускоряет потери энергии, а затем приводит к замедлению потерь по сравнению с экспоненциальным законом. Такое поведение может привести к нетривиальным последствиям и требует дальнейшего исследования

### ЛИТЕРАТУРА

1. Creamer D.B. Scintillating shallow-water waveguides // *Journal of Acoustical Society of America*. 1996. Vol. 99, No. 5. P. 2825–1838.
2. Knobles D.P., Sagers J.D. Forward and backward modal statistics for rough seabed surface scattering in shallow water // *Journal of Computational Acoustics*. 2014. Vol. 22, No. 1. 1440004.
3. Morozov A.K., Colosi J.A. Equations for normal-mode statistics of sound scattering by a rough elastic boundary in an underwater waveguide, including backscattering // *JASA Express Letters*. 2017. Vol. 142, No. 3. EL202-298.
4. Гулин О.Э., Ярошук И.О. Особенности ослабления низкочастотного звука при распространении в 2D-волноводе арктического типа со случайной батиметрией // *Подводные исследования и робототехника*. 2023. № 2(44). С. 67–74.
5. Evans R.B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom // *Journal of Acoustical Society of America*. 1983. Vol. 74, No. 1. P. 188–195.
6. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M.Yu. Level spacing statistics in a randomly inhomogeneous acoustic waveguide // e-print arXiv 1008.3037 [nlin.CD] 2010.
7. Hegewisch K.C., Tomsovic S. Random matrix theory for underwater sound propagation // *Europhysics Letters*. 2012. Vol. 97, No. 3. 34002.
8. Вировлянский А.Л., Макаров Д.В., Пранц С.В. Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах // *Успехи физических наук*. 2012. Т. 182, № 1. С. 19–48.
9. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M.Yu., Petrov P.S. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87, No. 1. 012911.
10. Hegewisch K.C., Tomsovic S. Constructing acoustic timefronts using random matrix theory // *Journal Acoustical Society of America*. 2013. Vol. 134, No 4. P. 3174–3184.
11. Makarov D. Random matrix theory for low-frequency sound propagation in the ocean: a spectral statistics test // *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2018. Vol. 26, No. 1. 185002.
12. Makarov D.V. Random matrix theory for an adiabatically-varying oceanic acoustic waveguide // *Wave Motion*. 2019. Vol. 90. P. 205–217.
13. Makarov D.V., Komissarov A.A. Modelling of sound propagation in the ocean using the matrix propagator // *Proceedings of Meetings on Acoustics*. 2020. Vol. 42. 055004
14. Макаров Д.В., Комиссаров А.А. Хаос и обращение волнового фронта при дальнем распространении звука в океане // *ДАН. Науки о Земле*. 2022. Т. 507, № 2. С. 316–322.
15. Макаров Д.В., Аллилуев А.Д. Об экспериментальном определении пропагатора акустического поля // *Подводные исследования и робототехника*. 2021. № 1(35). С. 80–84.
16. Макаров Д.В., Холмогоров А.О., Шакиров Р.Б. Влияние покмарков на распространение низкочастотного звука в мелком море // *Подводные исследования и робототехника*. 2021. № 4(38). С. 60–69.
17. Льюиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972. 400 с.

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы ТОИ ДВО РАН «Моделирование разномасштабных динамических процессов в океане» (рег. номер 21021700341-2).

### Об авторах

**МАКАРОВ Денис Владимирович**, д.ф.-м.н., зам. директора по научной работе.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская 43.

**Круг научных интересов:** акустика океана, теория нелинейных колебаний и волн, квантовая оптика, статистическая радиоп физика, теория хаоса

**E-mail:** makarov@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(950)2839293

**ORCID:** 0000-0002-2568-8927

**ПЕТРОВ Павел Сергеевич**, д.ф.-м.н., зав. лабораторией геофизической гидродинамики.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская 43.

**Круг научных интересов:** акустика океана, уравнения в частных производных, математическое моделирование, метод параболического уравнения

**E-mail:** petrov@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(914)9602192

**ORCID:** 0000-0002-0087-6681

**УЛЕЙСКИЙ Михаил Юрьевич**, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейных динамических систем.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская 43.

**Круг научных интересов:** теория нелинейных колебаний и волн, теория хаоса, физическая океанография, акустика океана.

**E-mail:** uleysky@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(423)2313081

**ORCID:** 0000-0001-6499-1470

### Для цитирования:

Макаров Д.В., Петров П.С., Улейский М.Ю. МЕТОД МАТРИЧНОГО ПРОПАГАТОРА ДЛЯ РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА СТАТИСТИЧЕСКИХ НЕРОВНОСТЯХ ДНА // *Подводные исследования и робототехника*. 2023. №. 3 (45). С. 73–82. DOI: 10.37102/1992-4429\_2023\_45\_03\_07. EDN: VLOPNQ.



# METHOD OF THE MATRIX PROPAGATOR FOR SOUND SCATTERING ON STATISTICAL BOTTOM IRREGULARITIES

**D.V. Makarov, P.S. Petrov, M.Yu. Uleysky**

The problem of sound propagation in the shallow sea in the presence of random bottom irregularities is considered. In the modal representation, evolution of an acoustic wavefield can be described using a matrix propagator. The paper proposes a method for calculating random propagator matrices based on perturbation theory for matrix operators and adapted for shallow seas. The model of two-dimensional sound propagation described by a wide-angle parabolic equation is taken as a basis. Within the framework of the proposed method, the influence of modes propagating inside the sedimentary layer is taken into account using additives to the mode attenuation coefficients. The inhomogeneity model described by the random Ornstein-Uhlenbeck process is considered, and analytical estimates for the matrix elements of the propagator are obtained. As an example for numerical simulation, a model of a shallow acoustic waveguide with a bottom sound channel is considered. A statistical analysis of the propagation of tonal sound signals with frequencies of 100, 200 and 400 Hz is carried out. Statistical estimates of horizontal variations of the mode spectrum and the scintillation index of individual modes of an acoustic wavefield are obtained. The dependence of sound scattering on the correlation radius of irregularity is studied. It is shown that the scattering-induced inter-mode coupling increases the attenuation of modes at relatively short distances, and at large distances it contributes to slowing down the attenuation and deviation from the exponential law of intensity decay. The scintillation index demonstrates rapid nonlinear growth at short distances, which is further accompanied by the achievement of saturation.

**Keywords:** random matrix theory, shallow sea acoustics, sound scattering

## References

1. Creamer D.B. Scintillating shallow-water waveguides // *Journal of Acoustical Society of America*. 1996. Vol. 99. № 5, p. 2825-2838. DOI: 10.1121/1.414817
2. Knobles D.P., Sagers J.D. Forward and backward modal statistics for rough seabed surface scattering in shallow water. *Journal of Computational Acoustics*. 2014. Vol. 22. No. 1, 1440004. DOI: 10.1142/S0218396X14400049
3. Morozov A.K., Colosi J.A. Equations for normal-mode statistics of sound scattering by a rough elastic boundary in an underwater waveguide, including backscattering. *JASA Express Letters*. 2017. Vol. 142, No. 3. EL292-EL298. DOI: 10.1121/1.5002734
4. Gulin O.E., Yaroshchuk I.O. Peculiarities of attenuation of low-frequency sound in the course of propagation in a 2D arctic-type waveguide with random bathymetry. *Underwater Investigations and Robotics*. 2023, No. 2(44). C. 67-74. [in Russian]. DOI: 10.37102/1992-4429\_2023\_44\_02\_06
5. Evans R.B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom. *Journal of Acoustical Society of America*. 1983. Vol. 74. No. 1. P. 188-195. DOI: 10.1121/1.389707
6. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M.Yu. Level spacing statistics in a randomly-inhomogeneous acoustic waveguide. 2010. e-print arXiv 1008.3037 [nlin.CD] (2010).
7. Hegewisch K.C., Tomsovic S. Random matrix theory for underwater sound propagation // *Europhysics Letters*. 2012. Vol. 97, No 3. P. 34002. DOI: 10.1209/0295-5075/97/34002
8. Virovlyansky A.L., Makarov D.V., Prants S.V. Ray and wave chaos in underwater acoustic waveguides. *Physics-Uspekh*. 2012. Vol. 55, No. 1. P. 18-46. DOI: 10.3367/UFNe.0182.201201b.0019
9. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M.Yu., Petrov P.S. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator. *Physical Review E*. 2013. Vol. 87, No. 1. P. 012911. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.012911
10. Hegewisch K.C., Tomsovic S. Constructing acoustic timefronts using random matrix theory. *Journal of Acoustical Society of America*. 2013. Vol. 134, No 4. P. 3174-3184. DOI: 10.1121/1.4818783
11. Makarov D.V. Random matrix theory for low-frequency sound propagation in the ocean: a spectral statistics test. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2018. Vol. 26. No. 1. P. 1850002. DOI: 10.1142/S2591728518500020
12. Makarov D.V. Random matrix theory for an adiabatically-varying oceanic acoustic waveguide. *Wave Motion*. 2019. Vol. 90. P. 205-217. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2019.05.007
13. Makarov D.V., Komissarov A.A. Modelling of sound propagation in the ocean using the matrix propagator. *Proceedings of Meetings on Acoustics*. 2020. Vol. 42. P. 055004. DOI: 10.1121/2.0001404
14. Makarov D.V., Komissarov A.A. Chaos and wavefront reversal for long-range sound propagation // *Doklady Earth Sciences*. 2022. Vol. 507, No. 2. P. 1118-1123. DOI: 10.1134/S1028334X22600931
15. Makarov D.V., Alliluev A.D. On experimental determination of the acoustic waveguide propagator. *Underwater Investigations and Robotics*. 2021. No. 1(35). P. 80-84. [in Russian]. DOI: 10.37102/1992-4429\_2021\_35\_01\_08
16. Makarov D.V., Kholmogorov A.O., Shakirov R.B. Influence of pockmarks on propagation of low-frequency sound in a shallow sea. *Underwater Investigations and Robotics*. 2021. No. 4(38). P. 60-71. [in Russian]. DOI: 10.37102/1992-4429\_2021\_38\_04\_06
17. Louisell W.H. *Radiation and Noise In Quantum Electronics*. New York.: McGraw-Hill, 1964. P. 336. ISBN: 0070387613

## About the authors

**MAKAROV Denis Vladimirovich**, Dr. Sci. Deputy Director.  
Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Address:** 43, Baltiyskaya st., Vladivostok, 690041, Russia

**Scientific interests:** ocean acoustics, theory of nonlinear oscillations and waves, quantum optics, statistical radiophysics, chaos theory

**E-mail:** makarov@poi.dvo.ru

**Phone:** +7(950)2839293

**ORCID:** 0000-0002-2568-8927

**PETROV Pavel Sergeevich**, Dr. Sci., Head of the Laboratory of Geophysical Hydrodynamics.

Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Address:** 43, Baltiyskaya st., Vladivostok, 690041, Russia

**Круг научных интересов:** ocean acoustics, partial differential equations, mathematical modelling, method of the parabolic equation

**E-mail:** petrov@poi.dvo.ru

**Phone:** +7(914)9602192

**ORCID:** 0000-0002-0087-6681

**ULEYSKY Michael Yurievich**, PhD, Leading Researcher of the Laboratory of Nonlinear Dynamical Systems.

Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Address:** 43, Baltiyskaya st., Vladivostok, 690041, Russia

**Scientific interests:** theory of nonlinear oscillations and waves, chaos theory, physical oceanography, ocean acoustics.

**E-mail:** uleysky@poi.dvo.ru

**Phone:** 8(423)2313081

**ORCID:** 0000-0001-6499-1470

### Recommended citation:

Makarov D.V., Petrov P.S., Uleysky M.Yu. METHOD OF THE MATRIX PROPAGATOR FOR SOUND SCATTERING ON STATISTICAL BOTTOM IRREGULARITIES. Underwater investigations and robotics. 2023. No. 3 (45). P. 73–82. DOI: 10.37102/1992-4429\_2023\_45\_03\_07. EDN: VLOPNQ.

